Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului

Olimpiada Naţională de Matematică 2008

Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti

1 martie 2008

CLASA A VIII-A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Subiectul 1. Un tetraedru regulat este secţionat cu un plan după un romb. Să se arate că rombul este pătrat.

Soluţie. Două laturi opuse ale rombului din planul de secţiune sunt paralele. Feţele ce conţin aceste laturi se intersectează după o muchie a tetraedrului - spre exemplu AB, paralelă cu laturile, deci şi cu planul de secţiune. 2puncte

Analog, muchia CD este paralelă cu planul de secţiune. Cum $AB \perp CD$, ... 1punct

rezultă că laturile consecutive ale rombului sunt perpendiculare. 3puncte

În concluzie rombul este pătrat. 1punct

Subiectul 2. Să se afle numerele iraţionale x astfel ca numerele $x^2 + 2x$ şi $x^3 - 6x$ să fie ambele raţionale.

Soluţie. Avem $a = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \in \mathbb{Q}$, unde $a \geq 0$, deci $x = -1 \pm \sqrt{a}$. 2puncte

Atunci $x^3 - 6x = -1 \pm 3\sqrt{a} - 3a \pm a\sqrt{a} + 6 \mp 6\sqrt{a} = 5 - 3a \pm (a - 3)\sqrt{a}$. Cum $x^3 - 6x$ şi $5 - 3a$ sunt ambele raţionale, rezultă că $(3 - a)\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$. 2puncte

Dacă $a \neq 3$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ şi apoi $x \in \mathbb{Q}$, ceea ce nu convine. . . 2puncte

Rezultă $a = 3$ şi deci $x = -1 \pm \sqrt{3}$. 1punct

Alternativ, fie $m = x^2 + 2x, n = x^3 - 6x, m, n \in \mathbb{Q}$. Avem $n = x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x - 2x = mx - 2x - 2m = (m - 2)x - 2m$, unde $x \notin \mathbb{Q}$. Rezultă $n = -2m$ şi $m - 2 = 0$, deci $m = 2, x^2 + 2x - 2 = 0$ şi $x = -1 \pm \sqrt{3}$.

Subiectul 3. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$, M piciorul perpendicularei din A pe planul $(A'CD)$, N piciorul perpendicularei din B pe diagonala $A'C$ şi P simetricul punctului D faţă de C. Să se arate că punctele M, N, P sunt coliniare.

Soluţie. Fie a lungimea laturii cubului. Punctul M este mijlocul segmentului $A'D$. 1punct

Din teorema catetei, $CN = \frac{BC^2}{A'C} = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{A'C}{3}$. 2puncte

Punctele M, N, P aparţin planului $(A'CD)$. 1punct

Conform reciprocei teoremei lui Menelaos aplicată în triunghiul $A'CD$, este suficient să arătăm că $\frac{DP}{PC} \cdot \frac{CN}{NA'} \cdot \frac{A'M}{MD} = 1$. 1punct

Cum $\frac{DP}{PC} = 2, \frac{CN}{NA'} = \frac{1}{2}$ şi $\frac{A'M}{MD} = 1$, cerinţa este demonstrată. 2puncte

Subiectul 4. Să se determine numerele reale strict pozitive x, y, z care satisfac simultan condiţiile: $x^3y + 3 \leq 4z$, $y^3z + 3 \leq 4x$ şi $z^3x + 3 \leq 4y$.

Soluţie. Înmulţind inegalităţile $x^3y \leq 4z-3$, $y^3z \leq 4x-3$ şi $z^3x \leq 4y-3$, obţinem $x^4y^4z^4 \leq (4x-3)(4y-3)(4z-3)$. 2puncte

Pe de altă parte, folosind inegalitatea mediilor $x^4 + 3 = (x^4+1) + 2 \geq 2x^2 + 2 = 2(x^2+1) \geq 4x$, adică $x^4 \geq 4x - 3$, ... 2puncte

cu egalitate pentru $x = 1$. 1punct

Înmulţind inegalităţile $x^4 \geq 4x - 3$, $y^4 \geq 4y - 3$, $z^4 \geq 4z - 3$ rezultă $x^4y^4z^4 \geq (4x-3)(4y-3)(4z-3)$. De aici rezultă $x = y = z = 1$. . . 2puncte